3章宿題解答(藤井出題)

新納浩幸

1 (1)

$$\begin{cases} 2x & +y & -3z & = -3 & \cdots (1) \\ 3x & -2y & +z & = -8 & \cdots (2) \\ x & +8y & -5z & = 6 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1)*2+(2)　$7x - 5z = -14 \cdots (4)$
(2)*4 +(3)　$13x - z = -26 \cdots (5)$
(4) -(5)*5 より $-58x = 116$ よって、$x = -2$
(5) より、$z = 13x + 26 = 0$
以上より、$y = 1$
rank は連立方程式の解が求まったので 3。

1 (2)

$$\begin{cases} x & +y & -2z & +u & = 4 & \cdots (1) \\ 2x & +3y & +z & -u & = 10 & \cdots (2) \end{cases}$$

(1)+(2)　$3x + 4y - z = 14 \cdots (5)$ (2) より　$u = 2x + 3y + z \cdots (6)$
解は (5),(6) 満たすもの、rank は 2。

1 (3)

$$\begin{cases} x & +3y & +z & -8u & = 3 & \cdots (1) \\ -2x & -5y & -z & +13u & = -4 & \cdots (2) \\ 3x & +8y & +2z & -21u & = 0 & \cdots (3) \end{cases}$$

(1)+(2)　$-x - 2y + 5u = -1 \cdots (4)$ (2)*2 + (3)　$-x - 2y + 5u = -8 \cdots (5)$
(4) と (5) を満たす解はない。rank は 2。

2

$Ax = 0$ が 0 以外の解を持つ $\Leftrightarrow$ A は正則でない

を示す。左側の命題は定理 3.3 より、$rankA < n$ と同値なので、

$rankA < n \Leftrightarrow A$ は正則でない

を示せば良い。この対偶をとって、以下を示せればよい。

$$rankA < n \text{ でない} \Leftrightarrow A \text{ は正則である}$$

$rankA \leq n$ なので、$rankA < n$ でない $\Leftrightarrow rankA = n$ である。定理 2.18 より

$$rankA = n \Leftrightarrow A \text{ は正則である}$$

なので証明された。