2章宿題解答 (藤村出題)

新納浩幸

1 (1)

正則。逆行列は以下。

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1 (2)

正則。逆行列は以下。

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 (3)

正則ではない。

2

A の要素として、$a_{ij} = 1$ ただし $i + j = n + 1$ で、それ以外は 0 であるような行列を考える。可換の条件を使うと、X は対角行列であることが示される。

次に、X の対角要素がすべて等しいことを背理法で示す。もしも、$x_{ii} \neq x_{jj}$ とする。このとき、A の要素として、$a_{ij} = 1$、$a_{ji} = 1$ であり、それ以外は 0 であるような行列を考える。可換の条件を使うと、$x_{ii} = x_{jj}$ となり矛盾。

3

任意の 2 次正方行列 A を以下とする。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

このとき、

$$A = c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

5

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^4 = I$$

以上より、

$$A = a_2P + a_3P^2 + a_4P^3 + a_1P^4$$