1 章宿題解答 (谷津出題)

新納浩幸

1 (1)

$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$ を解く。

$$\begin{cases} c_1 & +2c_2 & & = 0 & \cdots(1) \\ c_1 & +c_2 & -2c_3 & = 0 & \cdots(2) \\ -c_1 & & +5c_3 & = 0 & \cdots(3) \end{cases}$$

(1)+(3)　$2c_2 + 5c_3 = 0 \cdots (4)$
(2)+(3)　$c_2 + 3c_3 = 0 \cdots (5)$
2·(5)-(4) より $c_3 = 0$ よって、$c_1 = c_2 = 0$
以上より、1 次独立。

1 (2)

$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$ を解く。

$$\begin{cases} c_1 & +2c_2 & & = 0 & \cdots(1) \\ & c_2 & +c_3 & = 0 & \cdots(2) \\ c_1 & +c_2 & +2c_3 & = 0 & \cdots(3) \\ & c_2 & +3c_3 & = 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

(1)-(3)　$c_2 - 2c_3 = 0 \cdots (5)$ (4)-(5) より $5c_3 = 0$ よって $c_3 = 0$。よって、$c_1 = c_2 = 0$ 。
以上より、1 次独立。

2

n 次元の列ベクトル a_i^t を並べて以下のような、$n \times n+1$ 行列を作成する。

$$A = \begin{bmatrix} a_1^t & a_2^t & \cdots & a_{n+1}^t \end{bmatrix}$$

Th.2.17(p.26) より、$rank(A) \leq n$。Th2.16 (p.25) より A の列ベクトルの 1 次独立な最大個数は n となる。以上より、$a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ が 1 次独立になることはないので、1 次従属である。

3 (1)

$e_1 = (0, 1, 3)$、$e_2 = (1, 0, 1)$ は基底である。
e_1 と e_2 が与えられた平面上にあるのは明らか。
また与えられた平面上の任意の点を $w = (x, y, z)$ とおき、

$$c_1e_1 + c_2e_2 = w$$

を考える。このとき、以下を満たす c_1、c_2 が存在すればよい。

$$\begin{cases} \quad c_2 & = x & \cdots (1) \\ c_1 & = y & \cdots (2) \\ 3c_1 \quad +c_2 & = z & \cdots (3) \end{cases}$$

$(1),(2)$ より、$c_1 = y$、$c_2 = x$ とおく。これは (3) を満たす。なぜなら、w が与えられた平面上にあることから、$x + 3y = z$ が成立しているからである。

3 (2)

$e_1 = (1, 2, 0)$、$e_2 = (0, 0, 1)$、は基底である。
e_1 と e_2 が与えられた平面上にあるのは明らか。
また与えられた平面上の任意の点を $w = (x, y, z)$ とおき、

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = w$$

を考える。このとき、以下を満たす c_1、c_2 が存在すればよい。

$$\begin{cases} c_1 & = x & \cdots (1) \\ 2c_1 & = y & \cdots (2) \\ \quad c_2 & = z & \cdots (3) \end{cases}$$

$(1),(3)$ より、$c_1 = x$、$c_2 = z$ とおく。これは (2) を満たす。なぜなら、w が与えられた平面上にあることから、$2x - y = 0$ が成立しているからである。