第1章 ベクトル 解答

谷津 哲平

2004年6月17日

1　次のベクトルは1次独立か否か

1.1　$a_1 = (1, 1, -1), a_2 = (2, 1, 0), a_3 = (0, -2, 5)$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 && (1)\\ c_1 + c_2 - 2c_3 &= 0 && (2)\\ -c_1 + 5c_3 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のときのみ連立式を満たすので一次独立．

1.2　$a_1 = (1, 0, 1, 0), a_2 = (2, 1, 1, 1), a_3 = (0, 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 && (4)\\ c_2 - 2c_3 &= 0 && (5)\\ c_1 + c_2 + 5c_3 &= 0 && (6)\\ c_2 + 3c_3 &= 0 && (7) \end{aligned}$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のときのみ連立式を満たすので一次独立．

2　n次元ベクトルが(n+1)個以上あればそれらは一次従属であることを示せ

一次従属でないと仮定すると，$c_1a_1 + c_1a_1 + ... + c_ia_i + ... + c_{n+1}a_{n+1} = 0$ において 0 ではない c_i が存在する．a_i で解くと

$$a_i = \frac{1}{c_i}(c_1a_1 + c_1a_1 + ... + c_{n+1}a_{n+1})$$

となり，一次結合の形となるので仮定に反する．よって一次従属である．

3　次の R^3 の平面は部分ベクトルである．基底をつくれ

(1)$x+3y-z=0$ $a_1=(1,0,1), a_2=(3,-1,0)$ これらは与式を満たし，以下の式を $c_1=c_2=0$ のみで満たすので一次独立である．よって基底．

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(2)$2x-y=0$ $a_1=(1,2,1), a_2=(0,0,1)$ これらは与式を満たし，以下の式を $c_1=c_2=0$ のみで満たすので一次独立である．よって基底．

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$