０１Ｔ６０１０Ｆ　　　大北　高広

１）
$$\begin{cases} 2x+y-3z=-3 \\ 3x-2y+z=-8 \\ x+8y-5z=6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -8 \\ 1 & 8 & -5 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & -15 & 7 & -15 \\ 0 & -26 & 16 & -26 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & -15 & 7 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 18 & 0 & 16 \\ 0 & -29 & 0 & -29 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 18 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

よって $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ となる。またＡのランクは３(fullrank)。

２）
$$\begin{cases} x+y-2z+u=4 \\ 2x+3y+z-u=10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

よって $\begin{cases} x=7z-4u+2 \\ y=-5z+3u+2 \end{cases}$ となる。またＡのランクは２。

これを

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とも表せる。

３）
$$\begin{cases} x+3y+z-8u=3 \\ -2x-5y-z+13u=-4 \\ 3x+8y+2z-21u=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 13 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -21 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

rankA≠rank$[Ab]$であり、解はない。また、Aのランクは２。

定理４の証明

Aが正方行列とする。Aが正則であり、Ａｘ＝０が、０の解を持つとする・・・　＊

Aが正則であるのでA^{-1}が存在する。よって、

$Ax=0 \Leftrightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}\cdot 0 \Leftrightarrow x=0$

$x=0$が成り立つので＊に反するので定理４は証明された。