問１　次の行列は正則か否か。また正則のときは逆行列を求めよ。

(　)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

よって行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ は、正則となる。

逆行列は、$\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ となる。

( )

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって行列$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$は、正則となる。

逆行列は、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$となる。

（iii）

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 6 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 6 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって行列$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$は、逆行列を持たないので正則ではない。

問２　ｎ次正方行列Ａが、任意のｎ次正方行列Ｘと可換、すなわち AX=XA をみたすならば、A=aI の形でなければならない。このことを示せ。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-11} & & & a_{n-1n-1} & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ x_{n-11} & & & x_{n-1n-1} & \\ x_{n1} & & & & x_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_{11}+\cdots+a_{1n}x_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{11}x_{1n}+\cdots+a_{1n}x_{nn} \\ \vdots & a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+\cdots+a_{2n}x_{n2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1}x_{11}+\cdots+a_{nn}x_{n1} & & & & a_{n1}x_{1n}+\cdots+a_{nn}x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$XA=\begin{pmatrix} x_{11}a_{11}+\cdots+x_{1n}a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{11}a_{1n}+\cdots+x_{1n}a_{nn} \\ \vdots & x_{21}a_{12}+\cdots+x_{2n}a_{n2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_{n1}a_{11}+\cdots+x_{nn}a_{n1} & & & & x_{n1}a_{1n}+\cdots+x_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

よってAX=XAとするにはA=aIとなる。

問３　任意の２次正方行列が$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$の一次結合であることを示せ。

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$＝$a_1$、　$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=$a_2$、　$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$=$a_3$、　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$=$a_4$、とする。

また任意の二次正方行列を$x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$とする。

$$x=x_{21}a_1+x_{22}a_2+x_{12}a_3+x_{11}a_4$$

$$x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、１次結合となることがわかる。

問４　行列Aが以下の時に、AP＝PAをみたす全ての行列Pを求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aが２次の正方行列であるのでAP=PAとなる為にはPは２次の正方行列となるので、

$P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$とする。

$AP = PA$ より、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} + P_{21} & P_{12} + P_{22} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{11} + P_{12} \\ P_{21} & P_{21} + P_{22} \end{pmatrix}$$

$P_{11} + P_{21} = P_{11}$　より、$P_{21} = 0$
$P_{12} + P_{22} = P_{11} + P_{12}$　より、$P_{22} = P_{11}$
$P_{22} = P_{11}$ なので何をいれてもかまわない。また P_{12} も何を入れても良い。
よって $P = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ となる。

問５　行列ＡとＰが以下の時に、ＡをＰで表す式を示せ。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = a_1 I + a_2 P + a_3 P^2 + a_4 {}^t P$$