１．次のベクトルは１次独立か否か。2

（1） $a_1 = (1,1,-1)$、　$a_2 = (2,1,0)$、　$a_3 = (0,-2,5)$

（2） $a_1 = (1,0,1,0)$、　$a_2 = (2,1,1,1)$、　$a_3 = (0,1,2,3)$

（1） $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$ が成立したとすると、

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad &= 0 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 &= 0 \\ -c_1 \qquad 5c_3 &= 0 \end{aligned}$$

これらから、c_1, c_2, c_3 をとくと、$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ とすべて０となる。よって、a_1, a_2, a_3 は１次独立となる。

（2） $c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$ が成立したとすると、

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

これらから、c_1, c_2, c_3 をとくと、$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ とすべて０となる。よって、a_1, a_2, a_3 は１次独立となる。

２．ｎ次元ベクトルが（ｎ＋1）個以上あればそれらは一次従属であることを示せ。

$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_n a_n + c_{n+1} a_{n+1} = 0$　が１次従属ではないとする。

$$a_{n+1} = -\frac{1}{c_{n+1}}(c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_n a_n)$$ とすると

a_{n+1} は１次結合となるので、成り立たないので、１次従属となる。

３．次の R^3 の平面は部分ベクトルである。基底を作りそれを証明せよ。

（1） $x + 3y - z = 0$

（2） $2x - y = 0$

（1） ２つの１次独立なベクトルをとればよいから、

$a_1 = (1,0,1)$、　$a_2 = \left(1, -\frac{1}{3}, 0\right)$

とおく。またこれが１次独立であることは、$c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0$ が成立したとすると、

$$c_1 + 3c_2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
 -c_2 &= 0 \\
c_1 \qquad &= 0
\end{aligned}
$$

これらから、c_1, c_2 をとくと、$c_1 = c_2 = 0$ とすべて０となる。よって、a_1, a_2 は
1 次独立となる。

（2） ２つの 1 次独立なベクトルをとればよいから、

$a_1 = (1,2,0)$ 、 $a_2 = (0,0,1)$

とおく。またこれが 1 次独立であることは、$c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0$ が成立したとすると、

$$
\begin{aligned}
c_1 \qquad &= 0 \\
2c_1 \qquad &= 0 \\
c_2 &= 0
\end{aligned}
$$

これらから、c_1, c_2 をとくと、$c_1 = c_2 = 0$ とすべて０となる。よって、a_1, a_2 は
1 次独立となる。