01T7069H 藤村元彦

線形代数学・2 章宿題、解答

問 1

(i)

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii)

正則ではない

問 2

n 次正方行列 A と任意の n 次正方行列 X の要素を、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

とし、 j 列 X_{ij} とした場合、 X の (i, j) 成分以外すべて 0 の行列だとすると、

$$A \times X_{ij} = x_{ij}\begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ & a_{2i} & \\ & \vdots & \\ & a_{ni} & \end{bmatrix} \qquad X_{ij} \times A = x_{ij}\begin{array}{c} \text{i 行>} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

となり、 $AX_{ij} = X_{ij}A$ であるためには、交差する $x_{ij}a_{ii} = x_{ij}a_{jj}$ 以外の要素はすべて 0 となる。

X はすべての X_{ij} を足し合わせたものなので、任意の n 次正方行列 X に対して $AX = XA$ であるためには、 $A = aI$ である必要がある。

問3

$X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると、$X=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

問4

$P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると、

$$AP=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$PA=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$$

より、

$a=a+c$ から、$c=0$

$b+d=a+b$ から、$a=d$

よって、$P=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$

問5

$$P^2=P\times P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので、$A=a_1P^4+a_2P+a_3P^2+a_4P^3$