線形代数

藤井 丈明

2004年6月24日

1. 次の方程式を解く

(1) $\begin{cases} 2x+y-3z=-3 \\ 3x-2y+z=-8 \\ x+8y-5z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-2z+u=4 \\ 2x+3y+z-u=10 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+3y+z-8u=3 \\ -2x-5y-z+13u=-4 \\ 3x+8y+2z-21u=0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 2x+y-3z=-3 \\ 3x-2y+z=-8 \\ x+8y-5z=6 \end{cases}$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & -15 & 7 & -15 \\ 0 & -26 & 16 & -26 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{15} & 1 \\ 0 & -26 & 16 & -26 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{15} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{58}{15} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{15} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

したがって $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y-2z+u=4 \\ 2x+3y+z-u=10 \end{cases}$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

したがって $\begin{cases} x=7z+4u+2 \\ y=-5z+3u+2 \end{cases}$

または $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{cases} x + 3y + z - 8u = 3 \\ -2x - 5y - z + 13u = -4 \\ 3x + 8y + 2z - 21u = 0 \end{cases}$

$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 13 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -21 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$

$\mathrm{rank}\ A \neq \mathrm{rank}[Ab]$ なので解は存在しない

2. 次の証明を行なう

·A は正方行列とする時、$Ax = 0$ が 0 でない解をもつための必要十分条件は、A が正則でないことである。

解) 背理法を用いると A は正則となる。

正則であるので逆行列が存在する。A の逆行列を $Ax = 0$ の両辺にかける。

$Ax = 0 \to A^{-1}Ax = A^{-1}0 \to x = 0$

したがって Ax は 0 の解を持つ。$\to$ 正則ではない。

したがって証明できた