統計検定直前対策講座
1級 統計数理
－ 検定 －

茨城大学 工学部 情報工学科
新納浩幸

「検定」の対策

検定はかなり範囲が広く、しかも難解

ベースになる考え方は押さえておく
過去問から考えて以下の3つが重要

* 正規分布の平均の検定
* 適合度検定
* 尤度比検定

ここらの出題はそれほど難解でもない

「検定」の過去問

＊ 基本的な考え方
2013-問4

＊ 正規分布の平均の検定
2012-問4, 2014-問3

その他、難問
2014-問4

＊ 適合度検定
2013-問5, 2014-問5

＊ 尤度比検定
2013-問5, 2014-問5

仮説検定の基本

(1) 帰無仮説 H0 と対立仮説 H1 を設定する

(2) H0 の仮定の下で検定統計量を設定

(3) 検定統計量を利用して観測結果が生じる確率(第１の過誤の確率、p値)を求める

(4) 上記確率が有意水準 0.05 よりも小さい場合、おかしいと考える、、、何がおかしいか？
(2) の H0 の仮定、、、棄却、H1 採択

確率ではなく棄却される統計量の実現値の範囲を求めても同じ、棄却域

例

あるコインの表裏のでる確率は同じか？　帰無仮説 $p= 1/2$、
10回中、何回以上表 or 裏が出たら公平ではないと考えるか？

帰無仮説を仮定すると、表が出た回数 $X \sim B(10,1/2)$

$P(X=10) =0.000977$ → 表/裏 が 10 回出る　0.001953
$P(X=\ 9) =0.009766$ → 表/裏 が　9 回以上出る　0.021484
$P(X=\ 8) =0.043945$ → 表/裏 が　8 回以上出る　0.107422

⇒ 9 回以上、表あるいは裏の一方が出たら同じではない

帰無仮説を仮定して、実験のデータが生じる(生じた)確率を求める

↑ モデル、統計量が必要

正規分布の平均の検定

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

正規母集団

データの集合と考えても良いし、
実験結果（確率変数）と見なしても良い

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

サンプル

ランダムな抽出と考えても良いし、
実験結果の値と見なしても良い

$$\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0 \\ H_1: \ \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

この検定が基本！

σ^2 が既知かどうかで利用する
統計量が異なる

分散既知

$\bar{X}$　を統計量として利用すればよい、、、一様最強力検定

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$$

H0 の仮定の下

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2 / n}} \sim N(0,1)$$

有意水準 α

$$P\left(\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2 / n}} \right| > z(\alpha / 2) \right) = \alpha$$

分散未知

$\bar{X}$ を統計量として利用すればよい、、、一様最強力検定

H0 の仮定の下

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{S^2}{n-1}}} \sim t_{n-1} \text{ 分布}$$

有意水準 α

$$P\left(\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/(n-1)}} \right| > t_{n-1}(\alpha/2) \right) = \alpha$$

過去問

2014-問3 はそのまま

2012-問4 は答えだけなら容易

一様最強力不偏検定とは何かを知らないとダメ

↑

厳密に示すのは大変、以下のことを書けば十分、
この方が応用が利く

ネイマンピアソンの定理から尤度比検定が最強力検定になる

単純2仮説の場合には一様最強力検定にもなる

適合度検定(1)

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$$

通常、これは未知

$$P(X = x_i) = p_i$$

f_i ： 実験で生じた x_i の頻度

$$N = \sum_{i=1}^{m} f_i$$ ：実験の総回数

データから $P(X = x_i) = \hat{p}_i$ と予想

この予想の分布が正しそうかどうかの検定

適合度検定（2）

導入する統計量は以下、天下り的、示すのは面倒

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{m-r-1} \quad \text{分布}$$

$e_i = N\ \hat{p}_i$　予想した分布からの頻度の期待値

r：　分布を予想したときに用いたパラメータ数

この部分の考え方が難しい
通常、分布を予想するには（パラメトリック）モデルを設定し、
最尤法からパラメータを推定し、そのパラメータを使って
分布を予想する、、、、このパラメータの個数が r

一様分布を考えたら、一様分布にパラメータはないので r = 0
既知の分布（パラメータのない分布）を考えても r = 0

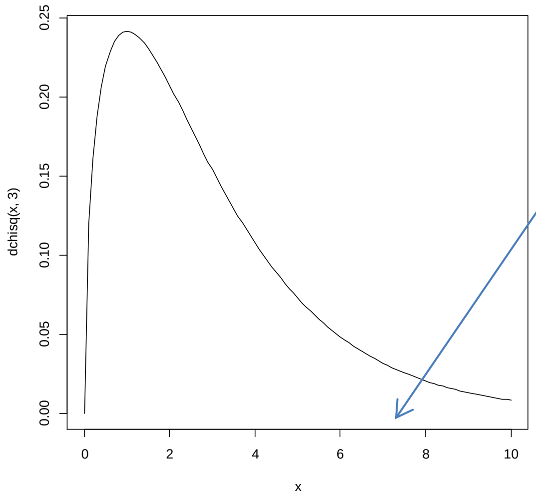
(このケースのみを適合度検定という場合もある)

例題 (r = 0)

メンデルの法則によれば、ある草花の遺伝子形質は 3: 2: 2: 1 の割合で
生じることが理論的にわかっている。今、この草花を 200本調査したところ、
70, 55, 48, 27 であった。この結果はメンデルの法則を支持しているといえるか。

$$Y = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{4-0-1} = \chi^2_3$$

$$y = \frac{(75-200\cdot 3/8)^2}{200\cdot 3/8} + \frac{(55-200\cdot 2/8)^2}{200\cdot 2/8} + \frac{(48-200\cdot 2/8)^2}{200\cdot 2/8} + \frac{(27-200\cdot 1/8)^2}{200\cdot 1/8} \approx 1.073$$



$$\chi^2_3(0.05) = 7.815$$

H0: accept

支持していないとは言えない

小さい値、予想した分布に
適合している

例題 (r > 0) その1

ある軍隊で、1年間に馬に蹴られて死亡した兵士の数とその部隊数を
10年間調べた結果、次のような表になった。ポワソン分布に従うか？

死亡者数	0	1	2	3	4	計
部隊数	109	65	22	3	1	200

X : 死亡者数　$X \sim Po(\lambda)$　$P(X = x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$

λ を最尤推定　$\hat{\lambda} = \dfrac{0\cdot 109 + 1\cdot 65 + 2\cdot 22 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1}{200} = \dfrac{122}{200} = 0.61$

$$Y = \sum_{i=1}^{5} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{5-1-1} = \chi^2_3$$

$r = 1$

死亡者数	0	1	2	3	4	計
部隊数	109	65	22	3	1	200
予測確率	0.5435	0.3313	0.1011	0.0206	0.0031	
期待値	108.7	66.3	20.2	4.1	0.6	

$$y = \frac{(109-108.7)^2}{108.7} + \frac{(65-66.3)^2}{66.3} + \frac{(22-20.2)^2}{20.2} + \frac{(3-4.1)^2}{4.1} + \frac{(1-0.6)^2}{0.6} \approx 0.7485$$

$\chi_3^2(0.05) = 7.815$ ⇒ H0: accept

この形でもいいけど、期待値が 5 より小さい部分はまとめることが通常行われる。

死亡者数の 3, 4 をまとめても期待値は 5 未満、

死亡者数 2,3,4 を 2 以上としてまとめる

死亡者数	0	1	2	計
部隊数	109	65	26	200
予測確率	0.5435	0.3313	0.1248	
期待値	108.7	66.3	25.0	

$$Y = \sum_{i=1}^{3} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{3-1-1} = \chi^2_1$$

$$r = 1$$

$$y = \frac{(109-108.7)^2}{108.7} + \frac{(65-66.3)^2}{66.3} + \frac{(26-25.0)^2}{25.0} \approx 0.066 \quad < \quad \chi^2_1(0.05) = 3.84$$

⇒ H0: accept

例題 (r > 0) その2

ある商品の購読客の年代が以下の表のようになった。
「20代の客は30代の客の2倍いる」を検定せよ。

年代	20代	30代	other	計
購買客数	52	30	15	97

$X = \{1,2,3\} = \{20代, 30代, other\}$ その商品を買った人の年代

$$P(X=1) = p_1 = 2\theta$$
$$P(X=2) = p_2 = \theta$$
$$P(X=3) = p_3 = 1-3\theta$$

帰無仮説の下での分布、、、多項分布

Θを最尤推定する

尤度 $L = \dfrac{97!}{52!30!15!}(2\theta)^{52}\theta^{30}(1-3\theta)^{15}$

対数尤度

$$l = \log L = \log \frac{97!}{52!30!15!} + 52(\log 2 + \log\theta) + 30\log\theta + 15\log(1-3\theta)$$

$$l' = \frac{52}{\theta} + \frac{30}{\theta} - \frac{3\cdot 15}{1-3\theta} = \frac{82-291\theta}{\theta(1-3\theta)} \qquad \hat{\theta} = \frac{82}{291}$$

年代	20代	30代	other	計
購買客数	52	30	15	97
期待値	54.7	27.3	15	

$$Y = \sum_{i=1}^{3} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{3-1-1} = \chi^2_1$$

$r = 1$

最尤法により推定したパラメータはΘの１つだけ

$$y = \frac{(52-54.7)^2}{54.7} + \frac{(30-27.3)^2}{27.3} + \frac{(15-15)^2}{15} \approx 0.40 \quad < \quad \chi^2_1(0.05) = 3.84$$

H0: accept

分割表による独立性の検定

適合度検定の応用

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	計
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
計	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	N

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_{ij} - a_i b_j / N)^2}{a_i b_j / N} \quad \sim \quad \chi^2_{(m-a)(n-1)}$$

帰無仮説（独立である）の意味に注意

2分割表による独立性の検定

以下の形で使われることが多い

	観点Ａ	観点Ｂ
グループＸ	a	b
グループＹ	c	d

先の公式は以下のように変形される

$$Y = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(b+d)(a+c)(c+d)} \sim \chi_1^2$$

例

薬は有効か？

	治る	治らない
薬飲む	68人	19人
薬飲まない	56人	34人

$$Y=\frac{177(68\cdot 34-19\cdot 56)^2}{(68+19)(19+34)(68+56)(56+34)}=5.36>\chi_1^2(0.05)=3.84$$

H1: Accept

薬を飲むことと、治る治らないには関連がある

尤度比検定

最も重要な検定方法、応用上も重要、
既存の代表的な検定法はこの検定法の変形

$$L = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} f(x;\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f(x;\theta)}$$

一般の場合の最大尤度

帰無仮説の下での最大尤度

$L > c$ の形で棄却域が与えられる ⟸ 利用タイプ1

単純二仮説の場合には一様最強検出力検定となる
（ネイマン・ピアソンの定理）

漸近的に $2\log L \sim \chi_p^2$ 分布 ⟸ 利用タイプ2

自由度 p は最尤推定するパラメータの個数の差

利用タイプ1

このタイプは無視して良いと思います

$L > c$ ← 通常、この c は直接は求まらない

尤度比検定は標準的な検定方式と同値であることが示されるだけ・・・

2012-問4「・・・・の一様最強力不偏検定による棄却域を求めよ」

検定方式自体は明らか、なので、その検定方式が
尤度比検定と同値であることを示すという流れ

この問題はよくない
上記の検定方式が一様最強力不偏検定になっていることは、
定理なので、答えのみでも accept せざるをえない、
わかっている人とわかっていない人の差別化ができない

利用タイプ2

実用度が高い

漸近的に $2\log L \sim \chi_p^2$ 分布

自由度 p は最尤推定するパラメータの個数の差

多項分布の適合度検定と似たような形、、、、、
ペアで出題される、、、、

＊ 適合度検定
2013-問5, 2014-問5

＊ 尤度比検定
2013-問5, 2014-問5

例題（適合度検定と同じ問題）

ある商品の購読客の年代が以下の表のようになった。
「20代の客は30代の客の2倍いる」を尤度比検定で検定せよ。

年代	20代	30代	other	計
購買客数	52	30	15	97

$X = \{1,2,3\} = \{20\text{代}, 30\text{代}, other\}$　その商品を買った人の年代

$$P(X=1) = p_1 = 2\theta$$
$$P(X=2) = p_2 = \theta$$
$$P(X=3) = p_3 = 1-3\theta$$

帰無仮説の下での分布、、、多項分布

Θを最尤推定する

尤度　$L = \dfrac{97!}{52!30!15!}(2\theta)^{52}\theta^{30}(1-3\theta)^{15}$

対数尤度

$$l = \log L = \log \frac{97!}{52!30!15!} + 52(\log 2 + \log \theta) + 30 \log \theta + 15 \log(1 - 3\theta)$$

$$l' = \frac{52}{\theta} + \frac{30}{\theta} - \frac{3 \cdot 15}{1 - 3\theta} = \frac{82 - 291\theta}{\theta(1 - 3\theta)} \qquad \hat{\theta} = \frac{82}{291}$$

ここまでは同じ

帰無仮説の下での最大対数尤度値　$\log L_0$

$$\log L_0 = l_0 = \log \frac{97!}{52!30!15!} + 52(\log 2 + \log \hat{\theta}) + 30 \log \hat{\theta} + 15 \log(1 - 3\hat{\theta})$$

一般の場合（一般の多項分布の場合）、最尤法から

$$\hat{p}_1 = \frac{52}{97} \qquad \hat{p}_2 = \frac{30}{97} \qquad \hat{p}_3 = \frac{15}{97}$$

帰無仮説の下での最大対数尤度値　$\log L_1$

$$\log L_1 = l_1 = \log \frac{97!}{52!30!15!} + 52\log \hat{p}_1 + 30\log \hat{p}_2 + 15\log \hat{p}_3$$

尤度比　$L = \dfrac{L_1}{L_0}$

$$Y = 2\log L \sim \chi^2_{3-1} = \chi^2_2$$

L1 のパラメータ数 3，L0 のパラメータ数 1
その差 2 が自由度

$$
\begin{aligned}
y &= 2\log L = 2(\log L_1 - \log L_0) \\
&= 2(52(\log \hat{p}_1 - \log 2\hat{\theta}) + 30(\log \hat{p}_2 - \log \hat{\theta}) + 15(\log \hat{p}_3 - \log(1-3\hat{\theta}))) \\
&= 2(52\log\frac{\hat{p}_1}{2\hat{\theta}} + 30\log\frac{\hat{p}_2}{\hat{\theta}} + 15\log\frac{\hat{p}_3}{1-3\hat{\theta}}) \\
&= 2(52\log\frac{3\cdot 52}{2\cdot 82} + 30\log\frac{3\cdot 30}{82} + 15\log\frac{3\cdot 15}{45}) \\
&= 2(-52\cdot 0.05 + 30\cdot 0.09 + 15\cdot 0) \approx 0.2 \quad < \quad \chi_2^2(0.05) = 5.99
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ H0: accept