統計検定直前対策講座
1級 統計数理
ー 最尤法 ー

茨城大学 工学部 情報工学科
新納浩幸

「推定」の対策

（点）推定は最尤法で決まり、これ以外は不要

区間推定は検定での棄却域の補集合

← 検定が本質的であり、区間推定の重要度は低い

最尤法による推定量の算出が重要！

「最尤法」の過去問

2012-問3、2013-問3、2013-問5、2014-問5

これらの中の小問で出題されている、
あるいは解答に必要とされている

尤度比検定では「最尤法」が必要

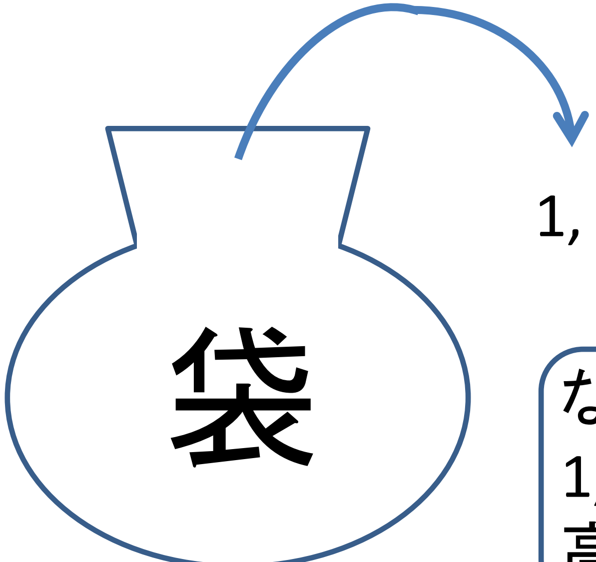
最尤法とは？

観測値のデータから、モデルのパラメータを
推定する方法

5つ取り出す

実験結果

尤度



1, 3, 2, -1, 1

なぜ 1, 3, 2, -1, 1 が取り出されたか？
1, 3, 2, -1, 1 を取り出す確率が最も
高かったから・・・

尤度を最大にするときのパラメータの値が、そのパラメータの推定値

尤度と対数尤度

X ：母集団（離散型確率変数）　　$P(X=x)$ ：分布

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ ：サンプル

$$L = P(X=x_1, X=x_2, \cdots, X=x_n)$$

$$= P(X=x_1)P(X=x_2)\cdots P(X=x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X=x_i)$$

尤度　←　パラメータの関数

$$l = \log L = \sum_{i=1}^{n} \log P(X=x_i)$$

対数尤度

l を最大にするパラメータは、L を最大にするパラメータ

⇒ l を最大にするパラメータを求めれば良い

例

袋に赤玉、青玉、白玉が無数に入っている。袋から10個の玉を取り出すと、
赤玉 5個、青玉 2個、白玉 3 個であった。袋の中の各玉の割合を推定せよ。

赤玉、青玉、白玉 の割合を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$$

尤度 $L = \frac{10!}{5!\,2!\,3!}\theta_1^5\theta_2^2\theta_3^3$

$$l = \log L = \log\frac{10!}{5!\,2!\,3!} + 5\log\theta_1 + 2\log\theta_2 + 3\log\theta_3$$

対数尤度

$$= \log\frac{10!}{5!\,2!\,3!} + 5\log\theta_1 + 2\log\theta_2 + 3\log(1-\theta_1-\theta_2)$$

これを最大にする $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ を求めればよい

最大値は極値になっているという必要条件から求める

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = \frac{5}{\theta_1} - \frac{3}{1-\theta_1-\theta_2} \quad 、 \quad \frac{\partial l}{\partial \theta_2} = \frac{2}{\theta_2} - \frac{3}{1-\theta_1-\theta_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial l}{\partial \theta_1}\right|_{\theta_1=\hat{\theta}_1,\theta_2=\hat{\theta}_2} = \dfrac{5}{\hat{\theta}_1} - \dfrac{3}{1-\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial l}{\partial \theta_2}\right|_{\theta_1=\hat{\theta}_1,\theta_2=\hat{\theta}_2} = \dfrac{2}{\hat{\theta}_2} - \dfrac{3}{1-\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2} = 0 \end{array}\right\}$$

未知数2つに式2つ
連立方程式

$$\Rightarrow \quad \hat{\theta}_1 = \frac{5}{10} \quad 、 \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2}{10} \quad 、 \quad \hat{\theta}_3 = 1-\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2 = \frac{3}{10}$$

連続型確率変数の尤度

X ：母集団（連続型確率変数）　　　$f(x)$ ：密度関数

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ ：サンプル

$$L = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta$$

$$= \left(\Delta^n\right)\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

最大化には
無関係

連続型のときは、
この部分のみを
尤度という

例

平均 1/λ の指数分布からのサンプル　$x_1, x_2, \cdots, x_n$　からλを最尤推定せよ

$$X \sim Ex(\lambda) \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$l = \log L = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\log \lambda - \lambda x_i)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{\lambda} - x_i) \qquad \left.\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{\hat{\lambda}} - x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$