

統計検定直前対策講座  
1級 統計数理  
－ モーメント母関数 －

茨城大学 工学部 情報工学科  
新納浩幸

# モーメント母関数

$X$  : 確率変数

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

を  $X$  の **モーメント(積率)母関数** という

$X$  と  $Y$  のモーメント母関数が同じならば、  
 $X$  と  $Y$  は同じ分布

再生性を証明する際に利用可能

# 独立な確率変数の和

$X, Y$  : 独立な確率変数

$$\begin{aligned}M_{X+Y}(t) &= E(e^{t(X+Y)}) \\ &= E(e^{tX} \cdot e^{tY}) \\ &= E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)\end{aligned}$$

# ガンマ分布の再生性

$X \sim Ga(a,1)$ 、 $Y \sim Ga(b,1)$  は独立

$$f_X(x) = x^{a-1} \frac{e^{-x}}{\Gamma(a)}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f_X(x) dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int x^{a-1} e^{-(1-t)x} dx$$

$y = (1-t)x$  で変数変換

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int \left( \frac{y}{1-t} \right)^{a-1} e^{-y} \frac{1}{1-t} dy \\ &= \left( \frac{1}{1-t} \right)^a \frac{1}{\Gamma(a)} \int y^{a-1} e^{-y} dy = \left( \frac{1}{1-t} \right)^a \end{aligned}$$

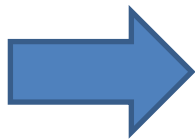
同様にして

$$M_Y(t) = \left( \frac{1}{1-t} \right)^b$$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left( \frac{1}{1-t} \right)^{a+b}$$



$Z \sim Ga(a+b, 1)$  のモーメント母関数と同じ



$$Z = X + Y \sim Ga(a+b, 1)$$

# カイ2乗分布の再生性

過去問 2012-問2

カイ2乗分布はガンマ分布の特殊ケースなので再生性があるのは明らか

$$X \sim \text{Ga}\left(\frac{n}{2}, 2\right) \quad \longrightarrow \quad f(x) = x^{n/2-1} \frac{e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}$$

自由度  $n$  のカイ2乗分布

# モーメント母関数から平均と分散

モーメント母関数を  $k$  回微分して  $0$  で評価

$$\left. \frac{d^k M_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = E(X^k)$$

これを利用して

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2$$