統計検定直前対策講座
1級 統計数理
－ モーメント母関数 －

茨城大学 工学部 情報工学科
新納浩幸

モーメント母関数

X ： 確率変数

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

をＸのモーメント（積率）母関数という

ＸとＹのモーメント母関数が同じならば、
ＸとＹは同じ分布

再生性を証明する際に利用可能

独立な確率変数の和

X, Y ： 独立な確率変数

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)})$$

$$= E(e^{tX} \cdot e^{tY})$$

$$= E(e^{tX})E(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$$

ガンマ分布の再生性

$X \sim Ga(a,1)$ 、$Y \sim Ga(b,1)$ は独立

$$f_X(x) = x^{a-1}\frac{e^{-x}}{\Gamma(a)}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f_X(x)dx = \frac{1}{\Gamma(a)}\int x^{a-1}e^{-(1-t)x}dx$$

$y = (1-t)x$ で変数変換

$$M_X(t) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int\left(\frac{y}{1-t}\right)^{a-1} e^{-y}\frac{1}{1-t}dy$$

$$= \left(\frac{1}{1-t}\right)^{a}\frac{1}{\Gamma(a)}\int y^{a-1}e^{-y}dy = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{a}$$

同様にして

$$M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^b$$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{a+b}$$

$$\Uparrow$$

$Z \sim Ga(a+b,1)$　のモーメント母関数と同じ

$$\Rightarrow \quad Z = X + Y \sim Ga(a+b,1)$$

カイ2乗分布の再生性

過去問 2012-問2

カイ2乗分布はガンマ分布の特殊ケースなので
再生性があるのは明らか

$$X \sim Ga\left(\frac{n}{2}, 2\right) \Rightarrow f(x) = x^{n/2-1}\frac{e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}$$

自由度 n のカイ2乗分布

モーメント母関数から平均と分散

モーメント母関数をｋ回微分して０で評価

$$\left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(X^k)$$

これを利用して

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2$$